

3.2.3 Módulos de Elasticidad

(Tippens P., 2011: 268-273)

Módulo de Young

En esta sección vamos a considerar que los esfuerzos y deformaciones son longitudinales cuando se aplican a alambres, varillas o barras. Por ejemplo, en la figura 13.4 una fuerza $\mathbf{F}$ se aplica al extremo de un alambre con un área en sección transversal A . El esfuerzo longitudinal está dado por

$$\text{Esfuerzo longitudinal} = \frac{F}{A}$$

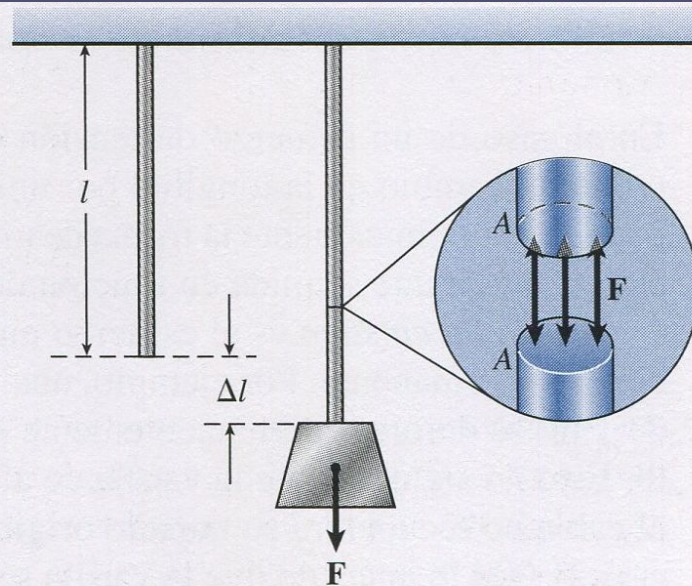


Figura 13.4 Cálculo del módulo de Young para un alambre con un área en sección transversal A . La elongación Δl se ha amplificado para mostrarla con mayor claridad.

Módulo de Young

La unidad métrica para el esfuerzo es el *newton por metro cuadrado*, que es idéntico al *pascal* (Pa).

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

La unidad del SUEU para el *esfuerzo es la libra por pulgada cuadrada* (lb/in²). Puesto que la libra por pulgada cuadrada se sigue usando, resulta útil compararla con la unidad del SI:

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa} = 6.895 \text{ kPa}$$

El efecto de tal esfuerzo es el alargamiento del alambre, o sea, un incremento en su longitud. Por tanto, la deformación longitudinal puede representarse mediante el cambio de longitud por unidad de longitud. Podemos escribir

$$\text{Deformación longitudinal} = \frac{\Delta l}{l}$$

Módulo de Young

donde l es la longitud original y Δl es la elongación (alargamiento total). Se ha demostrado experimentalmente que hay una disminución similar en la longitud como resultado de un esfuerzo de compresión. Las mismas ecuaciones se aplican ya sea que se trate de un objeto sujeto a tensión o de un objeto sujeto a compresión.

Si definimos el módulo de elasticidad longitudinal como *módulo de Young* Y , podemos escribir la ecuación (13.2) como

$$\text{Módulo de Young} = \frac{\text{esfuerzo longitudinal}}{\text{deformación longitudinal}}$$

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l} = \frac{Fl}{A \Delta l} \quad (13.3)$$

Módulo de Young

Las unidades del módulo de Young son las mismas que las unidades de esfuerzo: libras por pulgada cuadrada o pascuales. Esto es lógico, ya que la deformación longitudinal es una cantidad que carece de unidades (adimensional). Los valores representativos correspondientes de algunos de los materiales más comunes se muestran en las tablas 13.1 y 13.2.

Tabla 13.1

Constantes elásticas de varios materiales, en unidades del SI

Material	Módulo de Young Y , MPa*	Módulo de corte S , MPa	Módulo volumétrico B , MPa	Límite elástico MPa	Resistencia límite MPa
Acero	207 000	82 700	159 000	248	489
Aluminio	68 900	23 700	68 900	131	145
Cobre	117 000	42 300	117 000	159	338
Hierro	89 600	68 900	96 500	165	324
Latón	89 600	35 300	58 600	379	455

*(1 MPa = 10^6 Pa)

Módulo de Young

Tabla 13.2

Constantes elásticas de varios materiales en unidades del SUEU

Material	Módulo de Young Y , lb/in ²	Módulo de corte S , lb/in ²	Módulo volumétrico B , lb/in ²	Límite elástico lb/in ²	Resistencia límite lb/in ²
Acero	13×10^6	10×10^6	14×10^6	24 000	47 000
Aluminio	10×10^6	3.44×10^6	10×10^6	19 000	21 000
Cobre	17×10^6	6.14×10^6	17×10^6	23 000	49 000
Hierro	13×10^6	10×10^6	14×10^6	24 000	47 000
Latón	13×10^6	5.12×10^6	8.5×10^6	55 000	66 000

Módulo de Young

Ejemplo 13.1

Un cable telefónico de 120 m de largo y de 2.2 mm de diámetro se estira debido a una fuerza de 380 N a lo largo del cable. ¿Cuál es el esfuerzo longitudinal? Si la longitud después de ser estirado es de 120.10 m, ¿cuál es la deformación longitudinal? Determine el módulo de Young para el cable.

Módulo de Young

Solución: La sección transversal de un cable de 2.2×10^{-3} m de diámetro es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(2.2 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4}; \quad A = 3.80 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\text{Esfuerzo} = \frac{F}{A} = \frac{380 \text{ N}}{3.80 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$\text{Esfuerzo} = 100 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ MPa}$$

El cambio en la longitud es $(120.10 \text{ m} - 120.00 \text{ m})$ o 0.100 m . Por consiguiente,

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.10 \text{ m}}{120 \text{ m}}; \quad \text{Deformación} = 8.3 \times 10^{-4}$$

Por último, el módulo de Young es la razón del esfuerzo a la deformación.

$$Y = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{100 \text{ MPa}}{8.3 \times 10^{-4}}; \quad Y = 120\,000 \text{ MPa}$$

Módulo de Young

Ejemplo 13.2

¿Cuál es la carga máxima que se puede colgar de un alambre de acero de 6 mm de diámetro y 2 m de longitud, sin exceder su límite elástico? Determine el incremento en la longitud bajo el efecto de esta carga.

Módulo de Young

Solución: El área del cable es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(6 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4}; \quad A = 2.83 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

El esfuerzo limitante en este caso es el peso por unidad de área, o

$$\text{Límite elástico} = \frac{W}{A} \quad \text{o} \quad W = \text{límite elástico} \times A$$

$$W = (2.48 \times 10^8 \text{ Pa})(2.83 \times 10^{-5} \text{ m}^2) = 7.01 \times 10^3 \text{ N}$$

La mayor carga que puede soportarse se calcula a partir de este peso:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{7.01 \times 10^3 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 716 \text{ kg}$$

El incremento de longitud bajo dicha carga se determina a partir de la ecuación (13.3), en la siguiente forma:

$$\Delta L = \frac{l}{Y} \left(\frac{F}{A} \right) = \frac{2.00 \text{ m}}{2.07 \times 10^{11} \text{ Pa}} (2.48 \times 10^8 \text{ Pa})$$
$$\Delta L = 2.40 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La longitud aumenta 2.40 mm y la nueva longitud es 2.0024 m.

Módulo de corte

Los esfuerzos de compresión y de tensión producen un ligero cambio en las dimensiones lineales. Como se mencionó antes, un esfuerzo cortante altera únicamente la forma del cuerpo, sin que cambie su volumen. Por ejemplo, considere las fuerzas paralelas no concurrentes que actúan sobre el cubo que se ilustra en la figura 13.5.

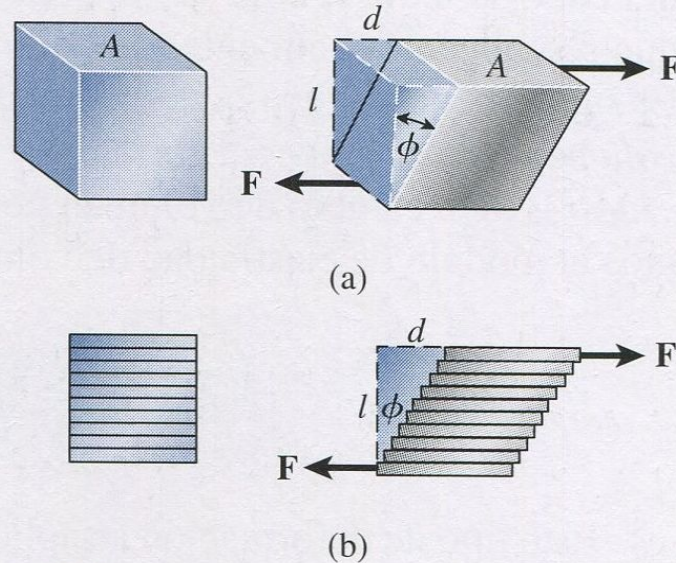


Figura 13.5 Esfuerzo cortante y deformación cortante.

La fuerza aplicada provoca que cada capa sucesiva de átomos se deslice sobre la siguiente, en forma parecida a lo que les ocurre a las páginas de un libro bajo un esfuerzo similar. Las fuerzas interatómicas restituyen al cubo su forma original cuando cesa dicho esfuerzo.

Módulo de corte

El esfuerzo cortante se define como la relación de la fuerza tangencial F entre el área A sobre la que se aplica. La *deformación cortante* se define como el ángulo ϕ (en radianes), que se conoce como *ángulo de corte* (consulte la figura 13.5b). Si se aplica la ley de Hooke, podemos ahora definir el *módulo de corte* S en la siguiente forma:

$$S = \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Deformación cortante}} = \frac{F/A}{\phi} \quad (13.4)$$

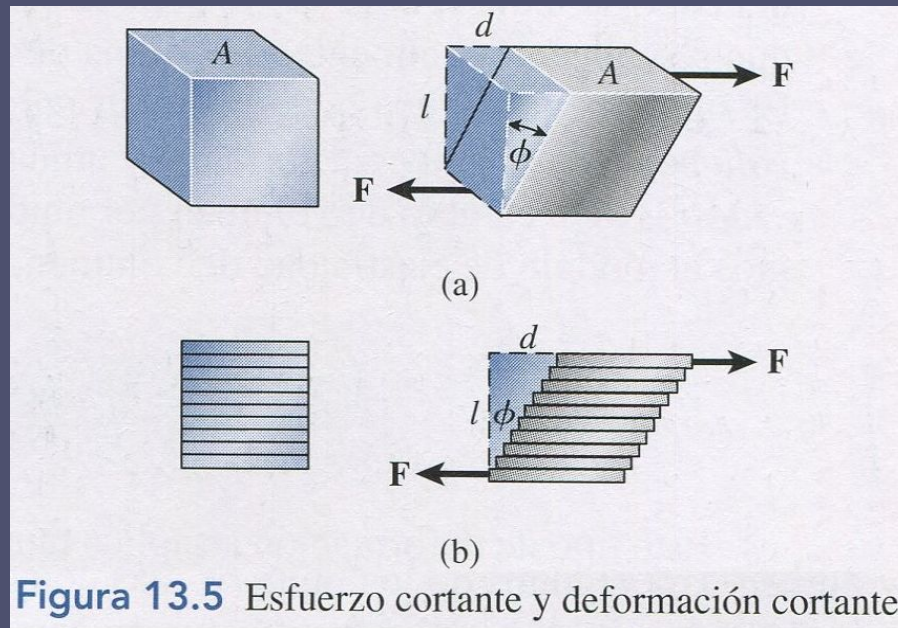


Figura 13.5 Esfuerzo cortante y deformación cortante.

Módulo de corte

El ángulo ϕ por lo general es tan pequeño que es aproximadamente igual a $\tan \phi$. Aprovechando este hecho, podemos volver a escribir la ecuación (13.4) en la siguiente forma:

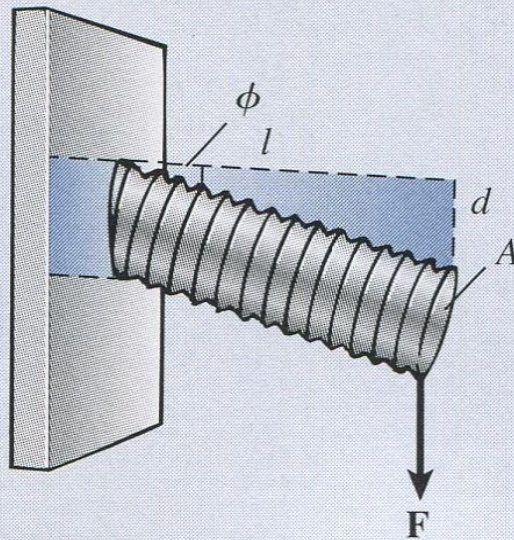
$$S = \frac{F/A}{\tan \phi} = \frac{F/A}{d/l} \quad (13.5)$$

Debido a que el valor de S nos da información sobre la rigidez de un cuerpo, a veces se le conoce como *módulo de rigidez*.

Módulo de corte

Ejemplo 13.3

Un perno de acero (figura 13.6) tiene una sección transversal de $1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y sobresale 3.8 cm de la pared. Si el extremo del perno está sometido a una fuerza cortante de 35 kN, ¿cuál será la flexión hacia abajo del perno?



Módulo de corte

Solución: Resolvemos para la desviación d como sigue:

$$S = \frac{F/A}{d/l} = \frac{Fl}{Ad}$$

$$d = \frac{Fl}{AS} = \frac{(35\,000\text{ N})(0.038\text{ m})}{(1.8 \times 10^{-4}\text{ m}^2)(8.27 \times 10^{10}\text{ Pa})}$$

$$d = 8.94 \times 10^{-5}\text{ m}$$

El extremo del perno cuyo diámetro mide aproximadamente 1.5 cm se desvía alrededor de 0.09 mm. Las deformaciones de corte por lo general son muy pequeñas.

Módulo volumétrico (elasticidad de volumen)

Hasta ahora hemos considerado los esfuerzos que causan un cambio en la forma de un objeto o que dan por resultado principalmente deformaciones en una sola dimensión. En esta sección nos ocuparemos de los cambios en el volumen. Por ejemplo, considere el cubo de la figura 13.7 en el cual las fuerzas se aplican uniformemente sobre la superficie.

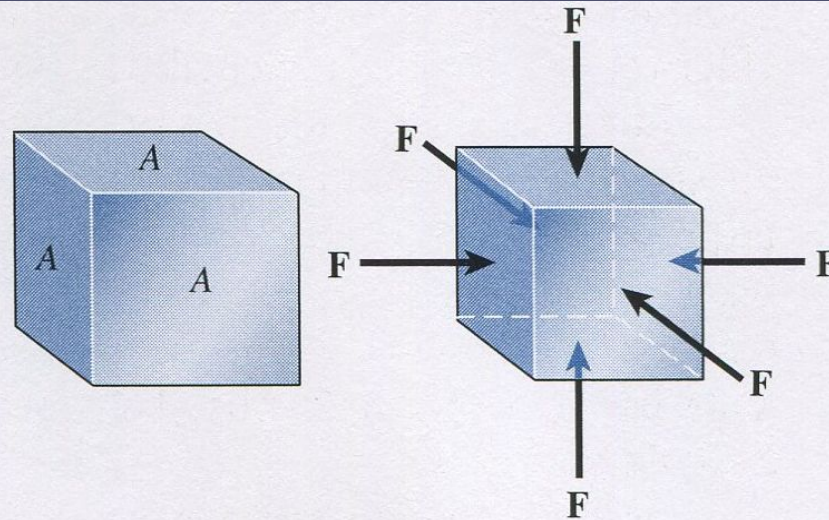


Figura 13.7 Módulo volumétrico. El volumen original se reduce por la acción de una fuerza de compresión uniforme sobre cada una de las caras.

Módulo volumétrico (elasticidad de volumen)

El volumen inicial del cubo se indica como V y el área de cada cara se representa por A . La fuerza resultante $\mathbf{F}$ que se aplica normalmente a cada una de las caras provoca un cambio en el volumen $-\Delta V$. El signo menos indica que el cambio representa una reducción de volumen. El *esfuerzo de volumen* F/A es la fuerza normal por unidad de área, mientras que la *deformación de volumen* $-\Delta V/V$ es el cambio de volumen por unidad de volumen. Al aplicar la ley de Hooke, definimos el módulo de elasticidad de volumen, o **módulo volumétrico**, de la manera siguiente:

$$B = \frac{\text{esfuerzo de volumen}}{\text{deformación de volumen}} = -\frac{F/A}{\Delta V/V} \quad (13.6)$$

Módulo volumétrico (elasticidad de volumen)

Este tipo de deformación se aplica tanto a líquidos como a sólidos. La tabla 13.3 muestra los módulos de volumen para algunos de los líquidos más comunes. Cuando se trabaja con líquidos a veces es más conveniente representar el esfuerzo como la presión P , que se define como la fuerza por unidad de área F/A . Con esta definición podemos escribir la ecuación (13.6) como

$$B = \frac{-P}{\Delta V/V} \quad (13.7)$$

Tabla 13.3

Módulos de volumen para líquidos

Líquido	Módulo volumétrico B	
	MPa	lb/in ²
Aceite	1 700	2.5×10^5
Agua	2 100	3.1×10^5
Alcohol etílico	1 100	1.6×10^5
Benceno	1 050	1.5×10^5
Mercurio	27 000	40×10^5

Módulo volumétrico (elasticidad de volumen)

Al valor recíproco del módulo volumétrico se le llama *compresibilidad* k . Con frecuencia conviene estudiar la elasticidad de los materiales midiendo sus respectivas compresibilidades. Por definición,

$$k = \frac{1}{B} = -\left(\frac{1}{P}\right) \frac{\Delta V}{V_0} \quad (13.8)$$

La ecuación (13.8) indica que la compresibilidad es el cambio fraccional en volumen por unidad de incremento en la presión.

Ejemplo 13.4

Una prensa hidráulica contiene cinco litros de agua. Determine el decremento en volumen de agua cuando se ve sometida a una presión de 2000 kPa.

Módulo volumétrico (elasticidad de volumen)

Ejemplo 13.4

Una prensa hidráulica contiene cinco litros de agua. Determine el decremento en volumen de agua cuando se ve sometida a una presión de 2000 kPa.

Solución: El decremento de volumen se obtiene al despejar ΔV de la ecuación (13.7):

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{PV}{B} = \frac{(2 \times 10^6 \text{ Pa})(5 \text{ L})}{2.1 \times 10^9 \text{ Pa}} \\ &= -0.00476 \text{ L} = -4.76 \text{ mL}\end{aligned}$$